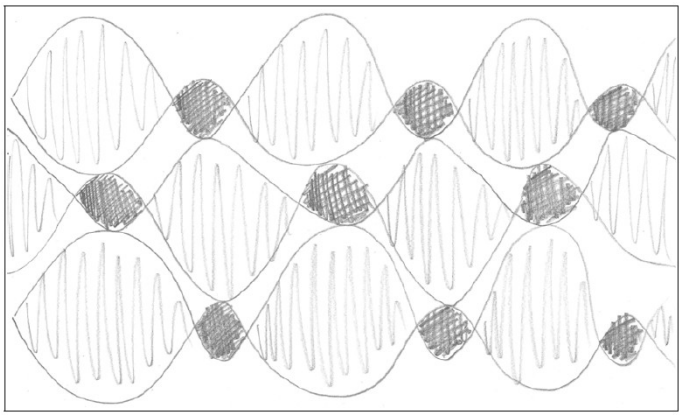
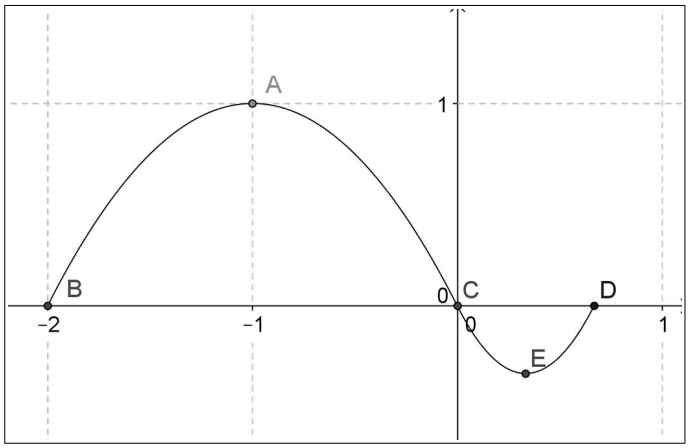
On veut réaliser un motif à imprimer sur un tissu.
Voici un croquis du projet :



Pour obtenir un rendu très régulier, on va réaliser ce motif grâce à des courbes mathématiques (des arcs de paraboles).
Dans un contexte professionnel, on utiliserait un logiciel de design, mais ici le travail peut être fait à la main.

La courbe qui constitue le motif élémentaire est la suivante :



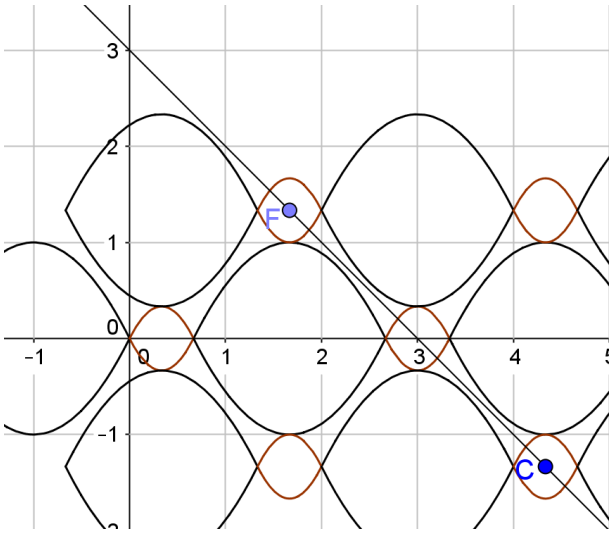
Questions :

1) ***Description du pavage***.
Donner les transformations nécessaires pour réaliser le pavage à partir de ce motif élémentaire (dessiner et nommer les éventuels axes, centres, vecteurs sur la figure ci-contre).

2) ***Équations des arcs de parabole.***
Le motif élémentaire est composé de deux arcs de paraboles.
Le premier (celui de gauche, entre B et C) est une partie de la courbe de la fonction définie par $f(x)=-x^2-2x$
Le second (celui de droite, entre C et D) est une partie de la courbe d'une fonction g du second degré. Donner un exemple de fonction g qui pourrait convenir (attention : x_D doit être inférieur à 1)

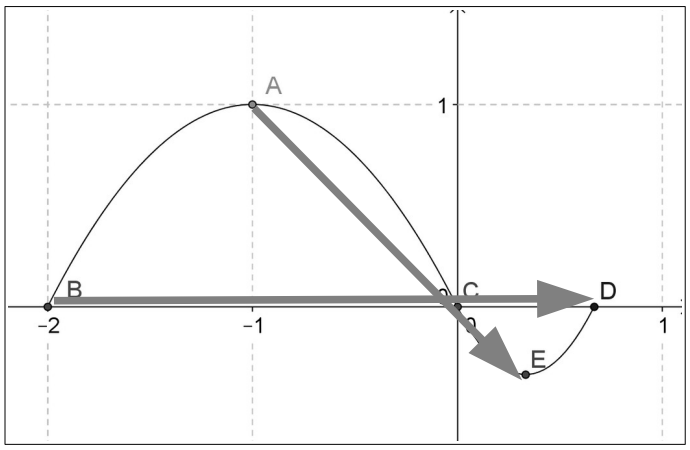
3) ***Dessin du motif élémentaire.***
Tracer soigneusement les deux arcs de paraboles (donner sur votre copie vos tableaux de valeurs).

4) ***Dessin de l'imprimé.***
Décalquer le motif de base obtenu à la question 3 et à partir de ce calque, créer l'imprimé définitif (vous pouvez ajouter des textures ou des couleurs).



5) ***Une droite du réseau sous-jacent au pavage.***
Sur l'image ci-contre, on a utilisé la fonction définie par $g(x)=3x^2-2x$.
Voici les coordonnées des points F et C :
$F\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$, $C\left(\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$
a) Calculer la pente de la droite (FC).
b) Donner par lecture graphique l'équation de la droite (FC).
c) Prouver par le calcul que le point de coordonnées (100 ;-97) appartient à cette droite.

Corrigé du D.M. :



1) Description du pavage (3 pts).
Il y a trois transformations à utiliser :

- la symétrie axiale dont l'axe est (BD)
- la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$. En répétant cette translation, on obtient une frise.
- La translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

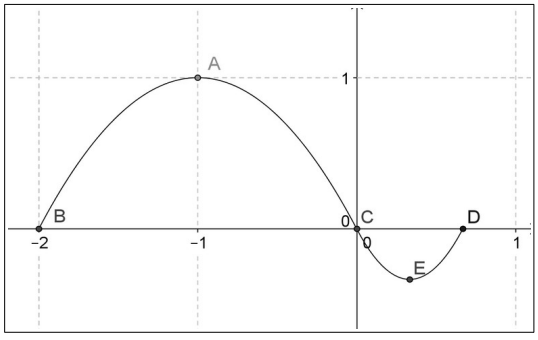
2) Calcul de l'équation du premier arc de parabole : (3,5pts)
On cherche a, b et c pour que $f(x)=ax^2+bx+c$
$x_B=-2$ et $y_B=0$ et on doit avoir $f(x_B)=y_B$
donc : $a\times(-2)^2+b\times(-2)+c=0$ c'est à dire
$\boxed{4a-2b+c=0}$
En faisant de même pour le point A, on obtient $\boxed{a-b+c=1}$. Et pour le point C on obtient $\boxed{c=0}$.
Il faut résoudre le système constitué des 3 équations encadrées ci-dessus.
On sait déjà que $f(x)=-x^2-2x$ et donc que $a-b+0=1$. Cela se ré-écrit $a=1+b$, donc dès qu'on connaîtra b , on pourra calculer a .
Pour calculer b , on substitue $1+b$ à la place de a dans la première équation $4a-2b+0=0$.
On obtient $4(1+b)-2b=0$. Il est alors facile de résoudre cette dernière équation et d'obtenir $b=-2$
Ensuite on en déduit que $a=1+b=1+(-2)=-1$.
Conclusion : $\boxed{f(x)=-x^2-2x}$

Calcul de l'équation du deuxième arc de parabole : (3,5pts)
On cherche de même que ci-dessus : $g(x)=ax^2+bx+c$.
Grâce au point C, on sait que $g(0)=0$ et donc que $\boxed{c=0}$.

On peut choisir l'abscisse du point D comme on veut : par exemple, $x_D=\frac{2}{3}$. Donc $g\left(\frac{2}{3}\right)=0$, ce qui donne l'équation : $\boxed{\frac{4a}{9}+\frac{2b}{3}+c=0}$.
Pour trouver une troisième équation, on utilise les nombres dérivés : comme les deux paraboles se raccordent de façon lisse en C, il faut que $f'(0)=g'(0)$.
$f(x)=-x^2-2x$ donc $f'(x)=-2x-2$ et $f'(0)=-2$.
$g(x)=ax^2+bx+c$ donc $g'(x)=2ax+b$ et $g'(0)=b$. Donc finalement : $\boxed{b=-2}$
Grâce aux trois équations encadrées, il est très facile d'obtenir a : ici, $a=3$ et finalement, $\boxed{g(x)=3x^2-2x}$.

3) Dessin du motif de base : (3pts).
On fait un tableau de valeurs avec x variant de -2 à 2/3 :

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1/6	1/3	1/2	2/3
$f(x)$	0	0,75	1	0,75	0				
$g(x)$					0	-0,25	-0,33	-0,25	0



On obtient la courbe ci-contre.

4) Dessin de l'imprimé (2 pts).
Il fallait faire un dessin analogue à celui-ci.
Les axe de symétrie et les vecteurs des translations sont en pointillés.

